

*XV. Ulusal Mekanik Kongresi, 03-07 Eylül 2007, ISPARTA*

## PLAKLARIN SAYISAL BİR YÖNTEMLE ELASTO-PLASTİK DİNAMİK ANALİZİ

Tekin GÜLTOP\*, Cengiz TOLUN\*\*

\*Gazi Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 06570 Maltepe, Ankara, \*\*Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü, 06570 Maltepe, Ankara  
[tgultop@gazi.edu.tr](mailto:tgultop@gazi.edu.tr) , [ctolun@gazi.edu.tr](mailto:ctolun@gazi.edu.tr)

### ÖZET

Bu çalışmada amaç, dört kenarı ankastre dikdörtgen ince plakların elastik ve elasto-plastik dinamik deplasmanlarının, değişik yükler altında Newmark Doğrusal İvme Metodu ile hesaplamaktır. İlk olarak, dikdörtgen plakların genel hareket denklemi Kirchhoff Plak Teorisi uygulanarak elde edildi ve plakın özdeğerleri ve özvektörleri sonlu farklar metodu kullanılarak hesaplandı. Daha sonra, plakın rijitlik matrisi ve kütle matrisi direkt rijitlik metoduyla oluşturuldu. Sonuçta, plakın rijitlik matrisi, kütle matrisi ve yük vektöründen oluşan sistemin hareket denklemi Newmark doğrusal ivme metodu ile çözüldü.

**Anahtar kelimeler:** Plak, elasto-plastik, Newmark doğrusal ivme metodu, titreşim, sonlu farklar

### ABSTRACT

The aim of this study is to examine the elastic and elasto-plastic deflections of rectangular thin plates with clamped supported under various dynamic loads by Newmark's linear acceleration method. Firstly, the general equation of motion of the rectangular plate has been derived by applying Kirchhoff's Plate Theory and the eigenvalues and eigenvectors of the plate with clamped supported have been obtained using the finite difference method. Then the stiffness matrix and mass matrix of the plate was constructed by the direct stiffness method. Finally, the equation of motion of the system which consists of the stiffness matrix, the mass matrix, and the load vector has been solved using the Newmark's linear acceleration method.

**Keywords :** Plate, elasto-plastik, Newmark's linear acceleration method, vibration, finite difference

### 1.GİRİŞ

Plakların dinamik analizi, mühendislik uygulamalarındaki öneminden dolayı senelerce yoğun çalışmalara konu olmuştur. Plaklar; otomatik, uçak, gemi, hidrolik yapı ve köprü gibi

yapıların önemli kısımlarını teşkil etmektedir [1]. Dikdörtgen ince plaklar ankastre, basit mesnetli ve serbest sınır şartları ve bu sınır şartlarının kombinasyonları durumunda incelenmiştir [2]. Plakların tabii frekans parametreleri ve mod şekilleri Levy ve Ritz metodu kullanılarak bulunmuştur.

Bir titreşim diferansiyel denkleminin analitik çözümü çeşitli parametrelere, başlangıç şartlarına ve zorlanmış titreşim ise, zorlama kuvvetinin fonksiyonuna bağlıdır. Bu fonksiyon, zamana bağlı bir trigonometrik fonksiyonla tanımlanabiliyorsa, titreşim diferansiyel denklemi kolayca çözülebilir. Trigonometrik bir fonksiyonla tanımlanamayan fonksiyonlardan oluşan titreşim diferansiyel denklemini çözmek oldukça zordur. Bundan dolayı hareket denkleminin sayısal bir çözüm metodu olan Newmark Doğrusal İvme Metodu ile çözümü pratik bir yoldur [3].

Titreşim diferansiyel denklemi küçük zaman aralıklarında fark ifadesi şeklinde yazılarak, her zaman aralığındaki deplasman, hız ve ivme değerleri hesaplanır. Bu zaman aralıklarındaki fark değerleri, bir önceki deplasman, hız ve ivme değerlerine eklenerek sonuç değerler her zaman aralığı için elde edilir. Böylece titreşimin başlangıcından itibaren kinematik değişkenlerin zamana göre değişimi bulunmuş olur [4].

## 2.PROBLEMİN TANIMI

Dikdörtgen plakın hareket denklemi Kirchhoff Plak Teorisi uygulanarak elde edilebilir.

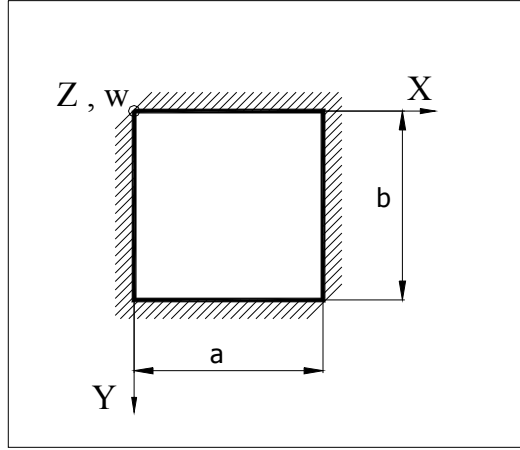
Genel Varsayımlar:

- 1- Plak malzemesi elastik, homojen ve izotropik özelliktedir.
- 2- Plak geometrisi başlangıçta düz konumdadır.
- 3- Plak kalınlığı diğer boyutların yanında çok küçüktür ( $a > 10h$ ).
- 4- Plak deformasyonundan doğan yerdeğiştirmeler plak kalınlığına göre küçüktür.  
 $\delta_{\max} = w_{\max} = (1/10 - 1/5)h$   
 $w_{\max} < 1/50 a_{\min}$
- 5- Deformasyondan önce plak orta düzlemine dik olan doğrultular, deformasyondan sonra düzgün ve dik kalırlar.
- 6- Plak orta düzlemine dik olan gerilmeler ihmal edilir.
- 7- Plak düzlemindeki kuvvetlerin etkisi altında, plakın orta düzlemindeki X ve Y yönlerindeki şekil değiştirmeler ihmal edilir.

Plak davranış denklemi;

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1)$$

dir. Burada;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  plak eğilme rijitliği,  $h$  plak kalınlığı,  $\nu$  Poisson oranı ve  $w$  sehimidir.



Şekil 1 Kenarları ankastre mesnetli dikdörtgen plak

### 3.ÇÖZÜM METODU

#### 3.1.Sonlu Farklarla Doğal Frekans Parametrelerinin Bulunması

Lineer elastik, homojen, izotropik dikdörtgen plakin serbest titreşim hareket denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (2)$$

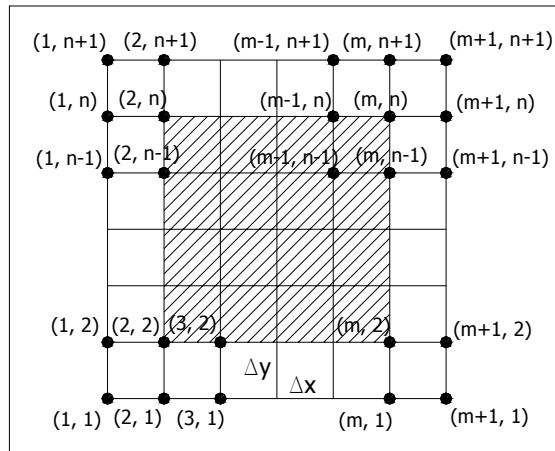
(2) nolu denklem değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözülürse,

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\lambda t} \quad (3)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada,  $W(x, y)$  şekil fonksiyonu,  $\lambda = (\Delta x)^4 \omega^2 \left( \frac{m}{D} \right)$  tabii frekans parametresi ve  $t$  zamandır.

Diferansiyel denklem merkezi farklar kullanılarak çözüldü.  $y$ - kenarı ( $x=0$  ve  $x=a$ ) ve  $x$ - kenarı ( $y=0$  ve  $y=b$ ) ankastre sınır şartı durumu için  $W(x, y) = W(m, n) = 0$ ,  $W(m+1, n) = W(m-1, n)$ 'dir. Burada  $(m, n)$   $y$ -kenarında ve  $x$ - kenarında herhangi bir noktadır (Şekil 2).



Şekil 2 Plakin ağ halinin numaralandırılmış olarak gösterimi

Doğal frekans parametreleri ve özvektörler Tablo 1’de gösterilmiştir.

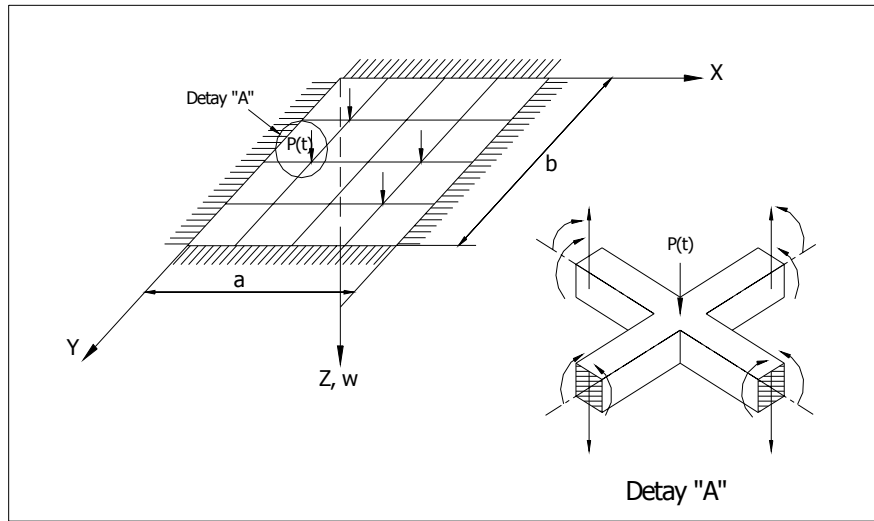
Tablo 1 Kare plakın doğal frekans parametreleri

	1. Doğal frekans parametresi	2. Doğal frekans parametresi	3. Doğal frekans parametresi	4. Doğal frekans parametresi	5. Doğal frekans parametresi
Doğal Frekans Parametreleri	36,659	70,752	70,752	94,205	101,06
Doğal Frekans Parametreleri [2]	35,992	73,413	73,413	108,270	108,270

#### 4.PLAKIN ELASTİK VE ELASTO-PLASTİK DEPLASMANLARININ BULUNMASI

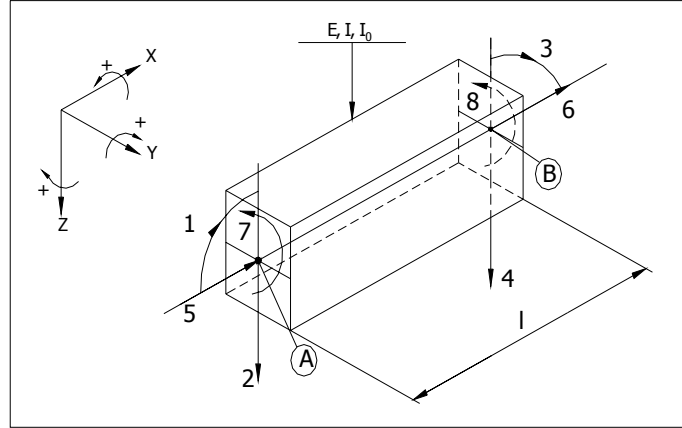
##### 4.1.Kiriş rijitlik matrisi

Plakın rijitlik matrisini oluşturmak için kirişlerden oluşmuş eşdeğer plakın ızgara modeli ele alınmıştır. Yapıları eşdeğer ızgara modelinde incelemek, yapılardaki karmaşıklığı basite indirgeme kolaylığı sağlar. Bu bölümde kirişlerin rijitlik matrisi kullanılarak, plakın rijitlik matrisi elde edilmiştir.



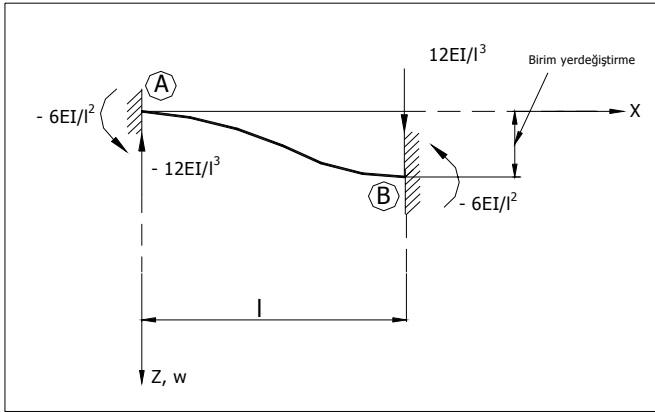
Şekil 3 Plakın eşdeğer ızgara modeli

Kiriş elemanının rijitlik matrisini ( $[p_{ij}]$ ) oluşturmak için Şekil 3’deki ızgara plakın alt elemanları olan kirişlerden bir tanesi alındı. Bu kiriş elemanının rijitlik katsayıları direkt rijitlik metoduyla bulundu. Kiriş elemanın numaralandırılmış sistemi Şekil 4’de görüldüğü gibi yapıldı.

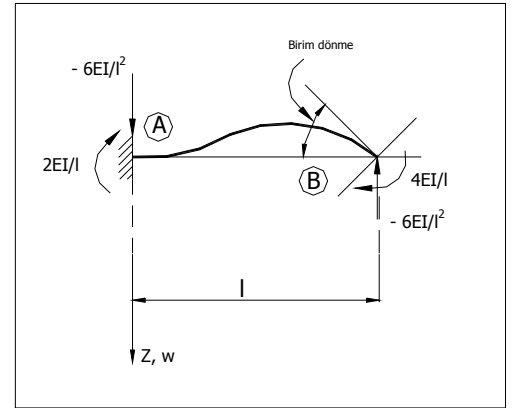


Şekil 4 Bir kiriş elemanında numaralandırılmış sistem

Direkt rijitlik metoda göre birim yerdeğiştirme ve birim dönme durumlarına göre kiriş elemanının rijitlik katsayıları ( $\rho_{ij}$ ) Şekil 5’de görüldüğü gibidir.



(a)



(b)

Şekil 5 Bir kiriş elemanın B düğüm noktasında (a) birim yerdeğiştirme ve (b) birim dönme

Kiriş elemanın rijitlik katsayıları ( $\rho_{ij}$ ) şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \frac{4EI}{\ell}, \rho_{21} = \frac{6EI}{\ell^2}, \rho_{31} = \frac{2EI}{\ell}, \rho_{41} = -\frac{6EI}{\ell^2}, \rho_{51} = \rho_{61} = \rho_{71} = \rho_{81} = \rho_{91} = 0 \\ \rho_{12} &= \frac{6EI}{\ell^2}, \rho_{22} = \frac{12EI}{\ell^3}, \rho_{32} = \frac{6EI}{\ell^2}, \rho_{42} = -\frac{12EI}{\ell^3}, \rho_{52} = \rho_{62} = \rho_{72} = \rho_{82} = \rho_{92} = 0\end{aligned}\quad (4a)$$

$$\begin{aligned}\rho_{13} &= \frac{2EI}{\ell}, \rho_{23} = \frac{6EI}{\ell^2}, \rho_{33} = \frac{4EI}{\ell}, \rho_{43} = -\frac{6EI}{\ell^2}, \rho_{53} = \rho_{63} = \rho_{73} = \rho_{83} = \rho_{93} = 0 \\ \rho_{14} &= -\frac{6EI}{\ell^2}, \rho_{24} = -\frac{12EI}{\ell^3}, \rho_{34} = -\frac{6EI}{\ell^2}, \rho_{44} = \frac{12EI}{\ell^3}, \rho_{54} = \rho_{64} = \rho_{74} = \rho_{84} = \rho_{94} = 0 \\ \rho_{15} &= \rho_{25} = \rho_{35} = \rho_{45} = 0, \rho_{55} = \frac{EA}{\ell}, \rho_{65} = -\frac{EA}{\ell}, \rho_{75} = 0, \rho_{85} = 0 \\ \rho_{16} &= \rho_{26} = \rho_{36} = \rho_{46} = 0, \rho_{56} = -\frac{EA}{\ell}, \rho_{66} = \frac{EA}{\ell}, \rho_{76} = 0, \rho_{86} = 0 \\ \rho_{17} &= \rho_{27} = \rho_{37} = \rho_{47} = \rho_{57} = \rho_{67} = 0, \rho_{77} = \frac{EI_0}{2(1+\nu)\ell}, \rho_{78} = -\frac{EI_0}{2(1+\nu)\ell} \\ \rho_{18} &= \rho_{28} = \rho_{38} = \rho_{48} = \rho_{58} = \rho_{68} = \rho_{78} = 0, \rho_{88} = \frac{EI_0}{2(1+\nu)\ell}\end{aligned}$$

(4b)

Kiriş elemanın rijitlik matrisi, (4a) ve (4b) ifadeleri kullanılarak;

$$[\rho_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{\ell} & -\frac{AE}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{\ell} & \frac{AE}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_0}{2(1+\nu)\ell} & -\frac{EI_0}{2(1+\nu)\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_0}{2(1+\nu)\ell} & \frac{EI_0}{2(1+\nu)\ell} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Simetrik} \quad (5)$$

şeklinde yazılır.

Eğer kiriş elemanındaki eksenel ve burulma etkileri ihmal edilirse, kiriş elemanının rijitlik matrisi aşağıdaki hali alır:

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & \text{simetrik} \\ -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \end{bmatrix} \quad (6)$$

#### 4.2.Plakın rijitlik matrisi

Plakın rijitlik matrisi, kiriş elemanının rijitlik matrisi kullanılarak aşağıdaki gibi bulundu:

$$[k_{ij}]_{27 \times 27} = \begin{bmatrix} [C] & [B] & & [A] & & & & & \\ [B]^T & [D] & [B] & & [A] & & & & \\ & [B]^T & [E] & & & [A] & & & \\ [A]^T & & & [F] & [B] & & [A] & & \\ & [A]^T & & [B]^T & [G] & [B] & & [A] & \\ & & [A]^T & [B]^T & [F] & & & [A] & \\ & & & [A]^T & & [H] & [B] & & \\ & & & & [A]^T & [B]^T & [J] & [B] & \\ & & & & & [A]^T & [B]^T & [K] \end{bmatrix}_{27 \times 27} \quad (7)$$

$[k_{ij}]$  matrisinin alt matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI}{\ell} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 3(\frac{12EI}{\ell^3}) & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 2(\frac{4EI}{\ell}) \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 2(\frac{12EI}{\ell^3}) & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}, \quad [F] = \begin{bmatrix} 3(\frac{12EI}{\ell^3}) & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & 2(\frac{4EI}{\ell}) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\frac{4EI}{\ell}) \end{bmatrix}, \quad [H] = \begin{bmatrix} 2(\frac{12EI}{\ell^3}) & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 2(\frac{12EI}{\ell^3}) & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} 4(\frac{12EI}{\ell^3}) & 0 & 0 \\ 0 & 2(\frac{4EI}{\ell}) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\frac{4EI}{\ell}) \end{bmatrix}, \quad [J] = \begin{bmatrix} 3(\frac{12EI}{\ell^3}) & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 2(\frac{4EI}{\ell}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Plakın rijitlik matrisindeki dönmeler ihmal edilirse [5],

$$[k_{ij}]_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} 4\left(\frac{12EI}{\ell^3}\right) & & & & & & & & \\ & 4\left(\frac{12EI}{\ell^3}\right) & & & & & & & \\ & & 4\left(\frac{12EI}{\ell^3}\right) & & & & & & \\ & & & 4\left(\frac{12EI}{\ell^3}\right) & & & & & \\ & & & & 4\left(\frac{12EI}{\ell^3}\right) & & & & \\ & & & & & 4\left(\frac{12EI}{\ell^3}\right) & & & \\ & & & & & & 4\left(\frac{12EI}{\ell^3}\right) & & \\ & & & & & & & 4\left(\frac{12EI}{\ell^3}\right) & \\ & & & & & & & & 4\left(\frac{12EI}{\ell^3}\right) \end{bmatrix} \quad (9)$$

şeklini alır.

## 5. NEWMARK DOĞRUSAL İVME METODU İLE PLAKIN DEPLASMANLARININ BULUNMASI

Dört kenarı ankastre plaka, düğüm noktalarından z-ekseni yönünde sinüzoidal ve impuls yükler (Şekil 6) uygulanarak zamana göre plakın deplasmanlarındaki değişim bulundu. Çok serbestlik dereceli sistem için Newmark tarafından geliştirilmiş olan iterasyon yöntemi [3] kullanıldı. Matris ve iterasyon işlemleri için MATLAB paket programı kullanıldı.

İterasyon İşlemleri :

### 1.0 Başlangıç şartları

$$1.1 [K] = [\phi]^T [k_{ij}] [\phi]$$

$$[M] = [\phi]^T [m_{ij}] [\phi]$$

$$[P] = [\phi]^T [p_{ij}]$$

$[\phi]$ : Plakın özvektör matrisi

$$1.2 [M][\ddot{q}_0] = [P_0] - [K][q_0]$$

1.3  $\Delta t$  seçilir.

$$1.4 [\hat{K}] = [K] + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} [M]$$

$$1.5 [a] = \frac{1}{\beta(\Delta t)} [M] \quad , \quad [b] = \frac{1}{2\beta} [b]$$

### 2.0 Herbir i adım için hesaplamalar

$$2.1 [\Delta \hat{P}_i] = [\Delta P_i] + [a][\dot{q}_i] + [b][\ddot{q}_i]$$

$$2.2 [\hat{K}][\Delta \dot{q}] = [\Delta \hat{P}_i]$$

$$2.3 [\Delta \hat{P}_i] = [\Delta P_i] + [a][\dot{q}_i] + [b][\ddot{q}_i]$$

$$2.4 [\Delta \dot{q}_i] = \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)} [\Delta q_i] - \frac{\gamma}{\beta} [q_i] + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{q}$$

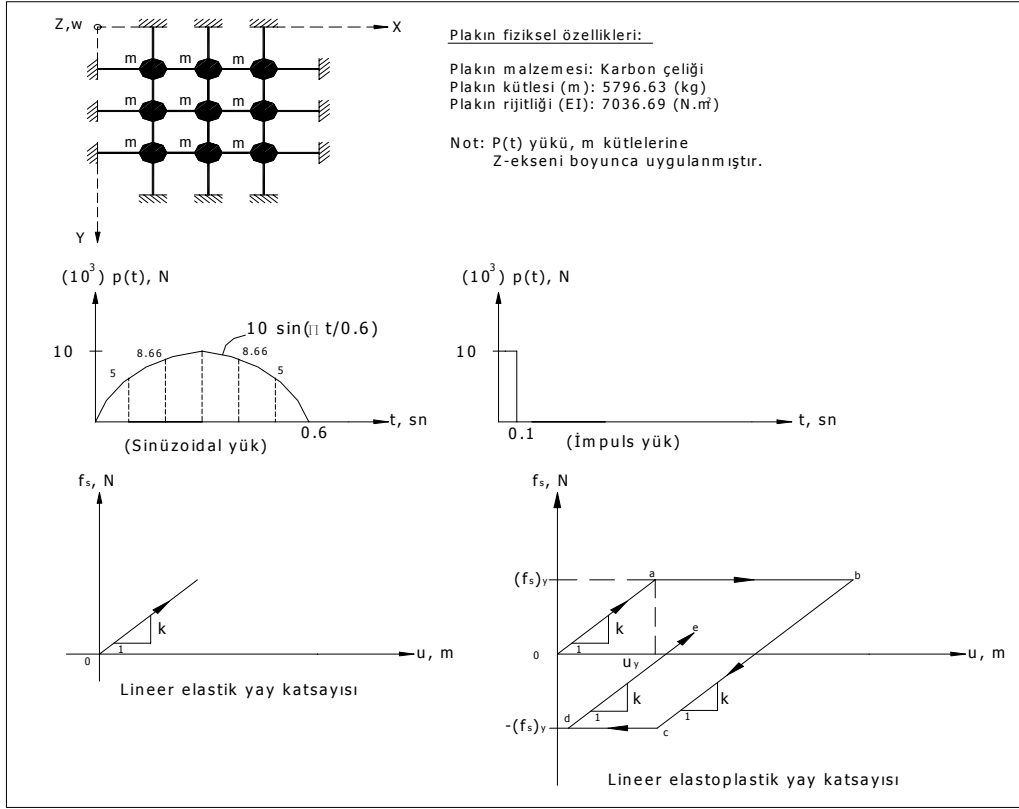
$$2.5 [\Delta \ddot{q}_i] = \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)^2} [\Delta q_i] - \frac{1}{\beta(\Delta t)} [\dot{q}_i] - \frac{\gamma}{2\beta} \ddot{q}$$

$$2.6 [q_{i+1}] = [q_i] + [\Delta q_i] \quad , \quad [\dot{q}_{i+1}] = [\dot{q}_i] + [\Delta \dot{q}_i] \quad ,$$

$$[\ddot{q}_{i+1}] = [\ddot{q}_i] + [\Delta \ddot{q}_i]$$

$$2.7 [u_{i+1}] = [\phi][q_{i+1}]$$

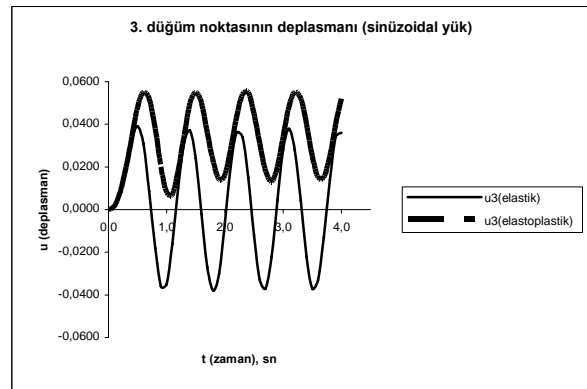
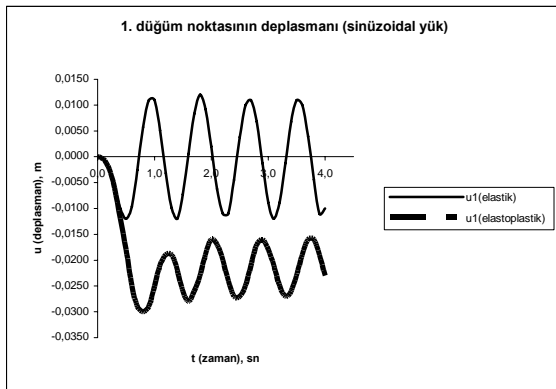


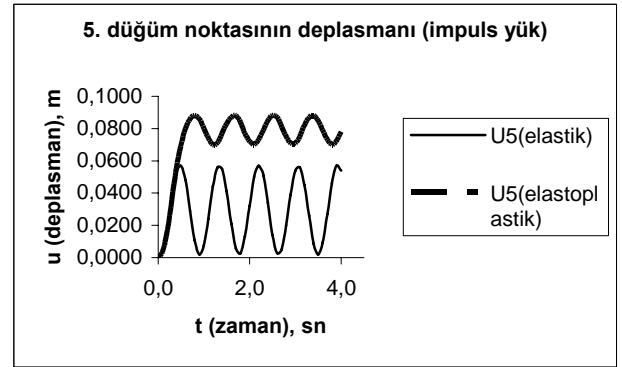
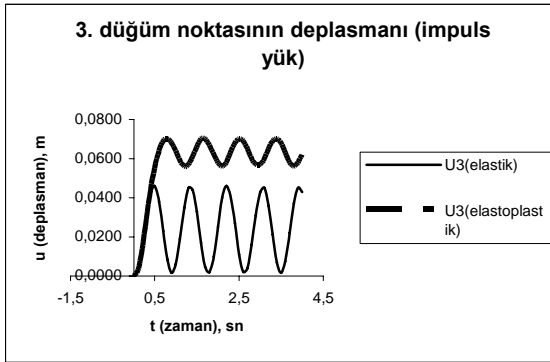
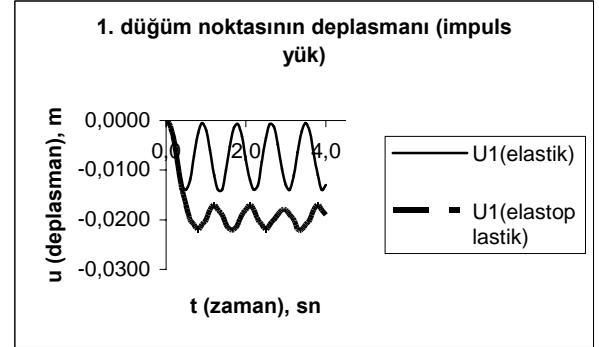
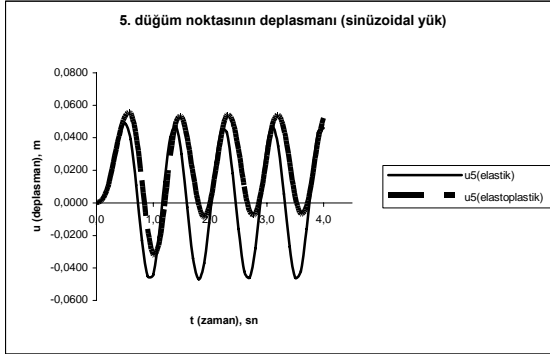


Şekil 6 Kare plakın düğüm noktalarına uygulanan yükler

## 6.SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

Bu çalışmada direk rijitlik yöntemi ve toplanmış kütle modeli kullanılarak dikdörtgen plakın dinamik analizi yapılmıştır. Plak için elde edilen elastik ve elastoplastik deplasmanlarda her iki yük içinde ıraksama olmadığı görülmüştür. Ayrıca elastoplastik deplasmanlar, elastik deplasmanlardan büyük çıkması sonucun tutarlı olduğunu göstermiştir. Elde edilen sonuçlardan örnek olarak sadece plakın 1., 3. ve 5. düğüm noktalarındaki deplasmanların değişimi aşağıda sunulmuştur.





## KAYNAKLAR

- [1] Szilard, R., "Theory and Analysis of Plate", Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [2] Leissa, A.W., "The Free Vibration of Rectangular Plates", J. of Sound and Vib., 31, 257-293, 1973
- [3] Chopra, A.K., "Dynamics of Structures", Prentice-Hall, Inc., 1995.
- [4] Gültop, T., "Yapılarda burulmalı titreşim probleminin enerji formülasyonu ve sayısal çözümü", II.Ulusal Hesaplamalı Mekanik konfransı Bildiri Kitabı KTÜ Trabzon, 373-382, 1996
- [5] Gustav Florin, P.E., "Theory and Design of Surface Structures Slabs and Plates", Trans Tech Pulications, 1980
- [6]. Filho, F.V., "Unifaction of Matrix Methods of Structural Analysis", J.AIAA. 1, 916-917, 1993
- [7] Lee, H.P., "Generalized Stiffness Matrix of a Curved-Beam Element", J. AIAA, 2043-2055, 1969.
- [8] Timoshenko, S., Young, D.H., and Weaver, W., Jr., "Vibration Problems in Engineering", Wiley, New York, 1974.